

第一部分 考点过关

第一章 数与式

A 湖南真题诊断练

刷诊断

1. A 【解析】 $\because -1 < 0 < \sqrt{2} < 3.5$, \therefore 最大的数是 3.5. 故选 A.
2. A 【解析】将向东走 80 米记作 +80 米, 说明“向东”为正方向, 与之相反的“向西”应为负方向, 所以向西走 60 米应记作 -60 米. 故选 A.
3. B 【解析】根据“同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加”, 可知 $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$. 故选 B.
4. B 【解析】 $149\ 600\ 000 = 1.496 \times 10^8$. 故选 B.
5. D 【解析】由题意得, $150 - (-180) = 150 + 180 = 330 (^{\circ}\text{C})$, 故选 D.
6. D 【解析】 $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$, 故选 D.
7. C 【解析】A 选项, $2a$ 与 a^2 不是同类项, 无法合并, 故 A 错误; B 选项, $6a^2b \div a = 6ab$, 故 B 错误; C 选项, 根据积的乘方法则得, $(ab)^7 = a^7b^7$, 故 C 正确; D 选项, $\sqrt{19}$, $\sqrt{6}$ 的被开方数不同, 无法进行运算, 故 D 错误. 故选 C.
8. D 【解析】-2 的相反数是 2, 故选 D.
9. D 【解析】由题意得, 当该机器人搭载 m 个机械手时, 该机器人平均每分钟采摘的苹果个数为 $10m$. 故选 D.
10. B 【解析】2025 年中国 GDP 的增长量为 $18.53 \times 5\% = 0.926\ 5$ (万亿美元), \therefore 2025 年中国 GDP 的增长量与 2024 年瑞士的 GDP 总量最接近. 故选 B.
11. 2 024 【解析】 $-(-2\ 024) = 2\ 024$, 故答案为 2 024.
12. $2\sqrt{3}$ 【解析】 $\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3}$, 故答案为 $2\sqrt{3}$.
13. $x \neq 19$ 【解析】由题可知, 当 $x - 19 \neq 0$ 时, 分式有意义, 解得 $x \neq 19$. 故答案为 $x \neq 19$.
14. $m(x - 2y)$ 【解析】 $mx - 2my = m(x - 2y)$. 故答案为 $m(x - 2y)$.
15. x^2 【解析】 $\frac{x^3y}{xy} = x^2$, 故答案为 x^2 .
16. $\frac{1}{2}$ 【解析】 $\because (a-2)^2 + |b+1| = 0$, $(a-2)^2 \geq 0$, $|b+1| \geq 0$, $\therefore a-2=0$, $b+1=0$, $\therefore a=2$, $b=-1$, 则 $a^b = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, 故答案为 $\frac{1}{2}$.
17. $\frac{1}{3}$ 【解析】原式 $= \frac{3(x+4)}{(x-4)(x+4)} - \frac{24}{(x-4)(x+4)} = \frac{3x-12}{(x-4)(x+4)} = \frac{3}{x+4}$.

$$\because x=5, \therefore \frac{3}{x+4} = \frac{3}{5+4} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{故答案为 } \frac{1}{3}.$$

18. 五 【解析】等式两边同时乘或除以同一个不为 0 的整式, 等式仍然成立. 对于等式 $2(a+b+c) = (a+b+c)$, $\therefore a+b=-c$, $\therefore a+b+c=0$, 故该等式恒成立, 且该等式两边不能同时除以 $(a+b+c)$, \therefore 第五步是错误的. 故答案为五.

19. 【解】原式 $= 2\sqrt{2} - 1 + 5 - 3 - 1$
 $= 2\sqrt{2}.$

20. 【解】 $(x+2)(x-2) + x(1-x) = x^2 - 4 + x - x^2 = x - 4.$

当 $x=6$ 时, 原式 $= 6 - 4 = 2.$

21. 【解】原式 $= \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x}$
 $= \frac{x-2}{x} + \frac{3}{x}$
 $= \frac{x+1}{x}.$

当 $x=3$ 时, 原式 $= \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}.$

B 考点突破练

考点 1 实数

刷基础

1. A 【解析】2 025 的相反数是 -2 025, 故选 A.
2. C 【解析】 $\because |\pm 2\ 025| = 2\ 025$, $\therefore x = \pm 2\ 025$, 故选 C.

☆ 关键点拨

绝对值的计算

实数 a 的绝对值记作 $|a|$, 当 $a \geq 0$ 时, $|a| = a$; 当 $a < 0$ 时, $|a| = -a$.

3. B 【解析】 $\sqrt[3]{9}$ 是无理数; $0.25, \frac{1}{12}, 0.021\ 021\ 021 \dots$ 是分数, 属于有理数. 故选 B.

☆ 方法技巧

无理数的常见形式

- (1) 无限不循环小数, 如 $0.101\ 001\ 000\ 1 \dots$ (相邻两个 1 之间依次多一个 0).
- (2) 最终结果含有 π 的数, 如 $\pi, \frac{1}{3}\pi$ 等.
- (3) 开方开不尽的数, 如 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}$ 等.
- (4) 某些三角函数值, 如 $\sin 60^\circ, \tan 30^\circ$ 等.

4. D 【解析】 $\because \sqrt{2\ 025} = 45$, $\therefore \sqrt{2\ 025}$ 的倒数是 $\frac{1}{45}$. 故选 D.

5. C 【解析】 $\because -\pi < -3 < 0 < \frac{1}{3}$, \therefore 最小的实数是 $-\pi$, 故选 C.

☆ 方法技巧

实数比较大小的方法

- (1) 法则法: 正数大于零, 零大于负数, 两个负数比较大小时, 绝对值大的反而小;
(2) 数形结合法: 在同一数轴上, 右边的点表示的数总比左边的点表示的数大.

6. D 【解析】由数轴可知, $-3 < a < -2$, $1 < b < 2$, $\therefore ab < 0$, $-a > b$, $|a| > |b|$, \therefore 选项 A、B、C 错误, 选项 D 正确. 故选 D.

7. A 【解析】 $0.000\ 001 = 1 \times 10^{-6}$, 故选 A.

☆ 方法技巧

科学记数法的表示

- (1) 用科学记数法表示较大的数时, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为正整数, 且 n 比原数的位数少 1, 据此判断即可.
(2) 绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为正整数, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负整数指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

8. D 【解析】 $33\ 700\ 000 \approx 34\ 000\ 000 = 3.4 \times 10^7$. 故选 D.

9. D 【解析】A 选项, -27 的立方根是 -3 , 故本选项错误; B 选项, $\sqrt{16} = 4$, 故本选项错误; C 选项, 1 的平方根是 ± 1 , 故本选项错误; D 选项, 4 的算术平方根是 2 , 故本选项正确. 故选 D.

10. D 【解析】由题意可得 $2a+1-a-2=0$, 解得 $a=1$, \therefore 这个正数的两个平方根为 3 和 -3 , 则这个正数为 9 , 故选 D.

11. 【解】原式 $= 1 + \sqrt{3} - 1 + 3 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} - 1 + 3 - \sqrt{3} = 3$.

☆ 关键点拨

零指数幂

非零实数的零次幂等于 1.

刷 易错

12. C 【解析】 $\because (-3)^2 = 9 = (\pm 3)^2$, $\therefore a = \pm 3$, $\therefore \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{3}$ 或 $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{3}$, 故选 C.

☆ 易错警示

平方根与立方根的综合

本题考查了有理数的平方根和立方根, 注意一个正数的平方根有两个, 先计算平方根再计算立方根.

刷 提升

1. C 【解析】根据题意得, $x+3=0$, $y-2=0$, 解得 $x=-3$, $y=2$,

$\therefore x^y = (-3)^2 = 9$. 故选 C.

☆ 方法技巧

非负数

- (1) 非负数的性质: ①若几个非负数的和为 0, 则这几个非负数一定都为 0;
②非负数有最小值, 最小值是 0;
③有限个非负数之和仍然是非负数.
(2) 常见的非负数的三种形式:
①绝对值: $|a| \geq 0$;
②平方(偶次幂): $a^2 \geq 0$, $a^{2n} \geq 0$ (n 为正整数);
③算术平方根: $\sqrt{a} \geq 0$ ($a \geq 0$).

2. B 【解析】 $\because a, c$ 互为相反数, $\therefore a < 0 < b < c < d$, $\therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}$, $\therefore b$ 的倒数最大, 故选 B.

3. B 【解析】 $1.251\ 7 \times 10^{-5} = 0.000\ 012\ 517$, 故选 B.

4. D 【解析】由数轴和刻度尺对应的数据可得数轴上的数加上刻度尺对应的数得到的和为 4, \therefore 刻度尺上的“5.2 cm”对应数轴上的数为 $4-5.2 = -1.2$, 故选 D.

5. $\frac{9}{2}$ 【解析】将 $x=49$ 输入数值运算程序得, $\frac{\sqrt{49}}{2} + 1 = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$.

6. ①②④ 【解析】 $\because a, b$ 是两个无理数, $\therefore \frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 是无理数.

\therefore 两个无理数 a, b 是一对“伙伴数”, $\therefore ab$ 是有理数, $\therefore \frac{1}{a} \cdot$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$ 是有理数, $\therefore \frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 一定是一对“伙伴数”, 故结论①

正确. \because 两个无理数 a, b 是一对“伙伴数”, $\therefore ab$ 是有理数, $\therefore a^2 b^2 = (ab)^2$ 是有理数, $\therefore a^2$ 与 b^2 一定是一对“伙伴数”, 故结论②正确. \because 两个无理数 a, b 是一对“伙伴数”, $\therefore a$ 与

$\frac{1}{b}$ 一定是无理数, 但 $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ 不一定是无理数, 故结论③

不正确. \because 两个无理数 a, b 是一对“伙伴数”, $\therefore a+1$ 与 $b+1$ 一定是无理数, ab 是有理数. $\because (a+1) \cdot (b+1) = ab+a+b+1$, \therefore 当 $a+b=0$ 时, $ab+a+b+1$ 是有理数, $\therefore a+1$ 与 $b+1$ 可能是一对“伙伴数”, 故结论④正确, \therefore 正确结论的序号为①②④. 故答案为①②④.

7. D2 【解析】 $E \times F = 14 \times 15 = 210$, $210 \div 16 = 13 \cdots 2$, 所以用十六进制表示 $E \times F$ 为 D2.

8. 【解】 $\sqrt{81} + |2 - \sqrt{3}| + \sqrt[3]{27} + 6 \div \left(-\frac{3}{4}\right) = 9 + 2 - \sqrt{3} + 3 + 6 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 9 + 2 - \sqrt{3} + 3 - 8 = 6 - \sqrt{3}$.

刷素养

9. 5. 10 35. 10 【解析】由题意得 $\sqrt{26} =$

$$\sqrt{5^2+1} \approx 5 + \frac{1}{2 \times 5} = 5.10. \text{ 如图, } \triangle ABC$$

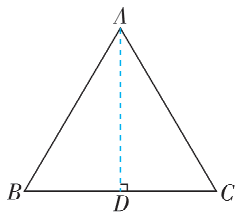
是等边三角形, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D. 设 $AB = BC = AC = a$, $\therefore BD =$

$$\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a, \therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \therefore S_{\triangle ABC} = 308\sqrt{3} \text{ m}^2, \therefore a^2 =$$

$$1\,232, \therefore a = \sqrt{1\,232} = \sqrt{35^2 + 7} \approx 35 + \frac{7}{2 \times 35} = 35.10 \text{ (m)}. \text{ 故答}$$

案为 5. 10, 35. 10.



考点2 整式

刷基础

1. D 【解析】 \because 参加“学科类选修课程”的有 m 人, 参加“体音美选修课程”的人数比参加“学科类选修课程”的多 9 人, \therefore 参加“体音美选修课程”的人数为 $(m+9)$ 人. \because 参加“科技类选修课程”的人数比参加“体音美选修课程”的 $\frac{1}{3}$ 多 5 人,

\therefore 参加“科技类选修课程”的人数为 $\frac{1}{3}(m+9) + 5 =$

$(\frac{1}{3}m+8)$ 人, 故选 D.

2. 9 【解析】 $\because a^2 - 2a = 4, \therefore 2a^2 - 4a + 1 = 2(a^2 - 2a) + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$. 故答案为 9.

3. A 【解析】多项式 $a^2 + 2ab^2 + 1$ 是三次三项式, 故选 A.

4. C 【解析】由同类项的定义可知 $m=2$. 故选 C.

方法技巧

同类项的概念及相关注意事项

- ①同类项的条件: 一是所含字母相同, 二是相同字母的指数也相同, 两者缺一不可;
- ②同类项与系数的大小无关;
- ③同类项与它们所含的字母顺序无关;
- ④所有常数项都是同类项.

5. C 【解析】A 选项, x 与 x^2 不能合并, 故此选项不符合题意; B 选项, $x^2 \cdot x^3 = x^5$, 故此选项不符合题意; C 选项, $x^3 \div x^2 = x$, 故此选项符合题意; D 选项, $(3x^2)^3 = 27x^6$, 故此选项不符合题意. 故选 C.

刷有所得

幂的运算

同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加.

同底数幂相除, 底数不变, 指数相减.

6. C 【解析】 $(2a-1)^2 - 25 = (2a-1+5)(2a-1-5) = (2a+4)(2a-6) = 4(a+2)(a-3)$. $\because a$ 为大于 3 的任意整数, \therefore 代数式 $(2a-1)^2 - 25$ 的值一定是 4 的倍数. 故选 C.

7. $(p+1)^2$ 【解析】直接提取公因式 $(p+1)$, 得原式 $= (p+1)(p-1+2) = (p+1)^2$.

8. $m(m+3)^2$ 【解析】原式 $= m(m^2+6m+9) = m(m+3)^2$.

易错警示

分解因式时要遵循的原则

分解因式要彻底, 分解到不能再分解为止.

9. 【解】 $(x+3y)^2 - 2x(x+2y) + (x-3y)(x+3y)$

$$= x^2 + 6xy + 9y^2 - 2x^2 - 4xy + x^2 - 9y^2$$

$$= 2xy,$$

当 $x=-1, y=2$ 时, 原式 $= 2 \times (-1) \times 2 = -4$.

10. 【解】由题意得 $(a+1)^2 + |b-2| = 0$,

$$\therefore a+1=0, b-2=0,$$

$$\therefore a=-1, b=2.$$

$$5(3a^2b - ab^2) - 4(3a^2b - ab^2)$$

$$= (3a^2b - ab^2) \times (5-4)$$

$$= 3a^2b - ab^2.$$

当 $a=-1, b=2$ 时,

$$\text{原式} = 3 \times (-1)^2 \times 2 - (-1) \times 2^2$$

$$= 3 \times 1 \times 2 - (-1) \times 4$$

$$= 6+4$$

$$= 10.$$

11. 44 【解析】 \because 第①个图形中黑棋、白棋一共有 $3^2 - 1^2 + 1 = 9$ (个), 第②个图形中黑棋、白棋一共有 $4^2 - 2^2 + 2 = 14$ (个), 第③个图形中黑棋、白棋一共有 $5^2 - 3^2 + 3 = 19$ (个), \dots , 按此规律排列, 则第⑧个图形中黑棋、白棋的总个数为 $(8+2)^2 - 8^2 + 8 = 44$, 故答案为 44.

刷易错

12. D 【解析】A 选项, 因为 $(x+3y)(x-3y) = x^2 - 9y^2$, 所以 A 错误; B 选项, 因为 $x^3 - 2xy + xy^2 = x(x^2 - 2y + y^2)$, 所以 B 错误; C 选项, 因为 $x^2 - 2xy - 8y^2 = (x+2y)(x-4y)$, 所以 C 错误; D 选项, 因为 $xy^2 - 6xy + 9x = x(y^2 - 6y + 9) = x(y-3)^2$, 所以 D 正确, 故选 D.

易错警示

因式分解与整式乘法的区分

因式分解是把一个多项式分解成几个因式的乘积的形式, 它与整式乘法互为逆运算, 要注意区分.

刷提升

1. B 【解析】A 选项, $S_{\text{阴影}} = 3(x+2) + x^2$, 故此选项不符合题意;

B 选项, $S_{\text{阴影}} = x^2 + 3x + 3 \times 2 = x^2 + 3x + 6$, 故此选项符合题意; C

选项, $S_{\text{阴影}} = (x+3)(x+2) - 2x$, 故此选项不符合题意; D 选项, $S_{\text{阴影}} = x(x+3) + 2 \times 3 = x(x+3) + 6$, 故此选项不符合题意. 故选 B.

2. D 【解析】A 选项, 若 $a=c$, 则 $a+b-a=0$, 即 $b=0$, 故 A 正确, 不合题意. B 选项, 若 $a=b$, $\therefore a+b-c=0$, $\therefore c=2a$. $\therefore ab=c+4$, $\therefore b^2=2a+4$, 即 $b^2-2a=4$, 故 B 正确, 不合题意. C 选项, $\therefore a+b-c=0$, $ab=c+4$, $\therefore ab=(a+b)+4$. 若 $a=2$, 则 $2b=6+b$, $\therefore b=6$, 故 C 正确, 不合题意. D 选项, 根据 C 可得, 若 $a=2$, 则 $b=6$, $\therefore ab=12$. $\therefore ab=c+4$, $\therefore c=8$, $\therefore b^2-5c=36-40=-4<0$, 即 $b^2-5c<0$, 故 D 不正确, 符合题意. 故选 D.

3. A 【解析】由题意可得 $M_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $M_1(x) = a_0 + a_1x$, $\therefore M_2(x) \cdot M_1(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2)(a_0 + a_1x) = a_0^2 + a_0a_1x + a_0a_2x^2 + a_0a_1x + a_1^2x^2 + a_1a_2x^3 = a_0^2 + 2a_0a_1x + (a_0a_2 + a_1^2)x^2 + a_1a_2x^3$. $\therefore M_2(x) \cdot M_1(x)$ 不含 x 的二次项, $\therefore a_0a_2 + a_1^2 = 0$, 即 $a_0a_2 = -a_1^2$, 故①错误. 由题意可得 $M_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $\therefore M_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3$. $\therefore a_0$ 为正整数, a_1, a_2, a_3 为自然数, \therefore 当 $a_0=1$ 时, $a_1+a_2+a_3=2$, 则 a_1, a_2, a_3 有 $0, 0, 2; 0, 1, 1; 0, 2, 0; 1, 0, 1; 1, 1, 0; 2, 0, 0$, 共 6 种情况. 当 $a_0=2$ 时, $a_1+a_2+a_3=1$, 则 a_1, a_2, a_3 有 $0, 0, 1; 0, 1, 0; 1, 0, 0$, 共 3 种情况. 当 $a_0=3$ 时, $a_1+a_2+a_3=0$, 则 a_1, a_2, a_3 有 $0, 0, 0$ 这 1 种情况, \therefore 满足条件的整式 $M_3(x)$ 共计有 10 种, 故②错误. \therefore 若 $a_n=1$ (n 为自然数), $\therefore M_n(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$, $\therefore M_n(10) = 1+10+10^2+\cdots+10^n$, $M_{n-1}(10) = 1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}$, $\therefore M_n(10) - M_{n-1}(10) = 10^n = 25$. 同理可得 $M_m(100) - M_{m-1}(100) = 100^m = 4\,000$, $\therefore 10^n \cdot 100^m = 25 \times 4\,000$, $\therefore 10^n \cdot 10^{2m} = 10^5$, 即 $10^{n+2m} = 10^5$, $\therefore n+2m=5$, $\therefore 2n+4m+1=2(n+2m)+1=2 \times 5+1=11 \neq 9$, 故③错误. 设 $c=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n-2\,021$, $d=-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_nx^n+2\,023$, 则 $c+d=2$. $\therefore c^2+d^2=10$, $(c+d)^2=c^2+d^2+2cd$, $\therefore 4=10+2cd$, 解得 $cd=-3$, $\therefore (c-d)^2=c^2+d^2-2cd=10-2 \times (-3)=16$, $\therefore c-d=\pm 4$, $\therefore \begin{cases} c+d=2, \\ c-d=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} c+d=2, \\ c-d=-4 \end{cases}$, $\therefore \begin{cases} c=3, \\ d=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} c=-1, \\ d=3 \end{cases}$. $\therefore M_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $a_0=3$, $\therefore a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n = M_n(x) - 3$, $\therefore c = M_n(x) - 3 - 2\,021 = M_n(x) - 2\,024$, \therefore 当 $c=3$ 时, $M_n(x) = 2\,027$; 当 $c=-1$ 时, $M_n(x) = 2\,023$, 故④错误. 综上, 正确的个数为 0 个. 故选 A.

4. 90 【解析】 $\therefore m+n=10$, $mn=5$, $\therefore m^2+n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 10^2 - 2 \times 5 = 100 - 10 = 90$. 故答案为 90.

5. ± 5 $-2x-2$ 或 $-x-2$ 【解析】 $\therefore x^2-25 = (x+5)(x-5)$, $\therefore x^2-25$ 的因式为 $x+5, x-5$, \therefore 若 x^2-25 与 $(x+b)^2$ 为关联多项式, 则 $x+b=x+5$ 或 $x+b=x-5$. 当 $x+b=x+5$ 时, $b=5$; 当 $x+b=x-5$ 时, $b=-5$. 综上, $b=\pm 5$. $\therefore (x+1)(x+2)$ 与 A 为关联多项式,

且 A 为一次多项式, $\therefore A=k(x+1)=kx+k$ 或 $A=k(x+2)=kx+2k$, k 为整数. 当 $A=k(x+1)=kx+k$ (k 为整数) 时, 若 $A+x^2-6x+2=kx+k+x^2-6x+2=x^2+(k-6)x+k+2$ 不含常数项, 则 $k=-2$, $\therefore A=-2(x+1)=-2x-2$. 当 $A=k(x+2)=kx+2k$ (k 为整数) 时, 若 $A+x^2-6x+2=kx+2k+x^2-6x+2=x^2+(k-6)x+2k+2$ 不含常数项, 则 $2k=-2$, $\therefore k=-1$, $\therefore A=-(x+2)=-x-2$. 综上, $A=-2x-2$ 或 $A=-x-2$. 故答案为 $\pm 5, -2x-2$ 或 $-x-2$.

6. 【解】 $(2x-y+1)(2x-y-1) + (4x^3y^2+2xy^4) \div (-xy^2)$
 $= [(2x-y)+1][(2x-y)-1] + (-4x^2-2y^2)$
 $= (2x-y)^2 - 1 - 4x^2 - 2y^2$
 $= 4x^2 - 4xy + y^2 - 1 - 4x^2 - 2y^2$
 $= -4xy - y^2 - 1$,
 把 $x=3, y=-\frac{1}{2}$ 代入得, 原式 $= -4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 6 - \frac{1}{4} - 1 = 4\frac{3}{4}$.

7. 【解】(1) $x^5 - x^3 + 3x^2 - 3$
 $= x^3(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1)$
 $= (x^2 - 1)(x^3 + 3)$
 $= (x-1)(x+1)(x^3 + 3)$.
 (2) $a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b - 2ab$
 $= (a^2 - 2ab + b^2) + (2a - 2b) + 1$
 $= (a-b)^2 + 2(a-b) + 1$
 $= (a-b+1)^2$.

刷素养

8. 【解】(1) $\therefore m-n=3$, $m^2-n^2 = (m+n)(m-n)$, \therefore 第 1 个“三方数”是 $4^2-1^2=3 \times (1+4)=3 \times 5=15$, 第 2 个“三方数”是 $5^2-2^2=3 \times (2+5)=3 \times 7=21$, 第 3 个“三方数”是 $6^2-3^2=3 \times (3+6)=3 \times 9=27$, \cdots , 第 10 个“三方数”是 $13^2-10^2=3 \times (10+13)=3 \times 23=69$. 故答案为 21, 69.
 (2) 2 025 是“三方数”, 理由如下: 由 (1) 可知第 k (k 是正整数) 个“三方数”是 $(k+3)^2 - k^2 = 3(k+k+3) = 3(2k+3)$,
 当 $3(2k+3) = 2\,025$ 时, 解得 $k=336$, 故 2 025 是“三方数”.

考点 3 分式

刷基础

1. B 【解析】 $\frac{x}{y^2}, \frac{3}{a-b}, \frac{a+1}{a}, \frac{a+2}{a^2-4}$ 是分式; $\frac{n-2}{\pi}, \frac{1}{2}(m+n)$ 是整式, \therefore 分式有 4 个. 故选 B.
 2. D 【解析】A 选项, $\frac{x^2}{y^2}$ 不一定等于 $\frac{x}{y}$, 变形错误, 不符合题意; B 选项, $\frac{x-2}{y-2}$ 不一定等于 $\frac{x}{y}$, 变形错误, 不符合题意; C 选项, $\frac{-1+y}{3} = -\frac{1-y}{3}$, 变形错误, 不符合题意; D 选项, $\frac{1+y}{xy} = \frac{x+xy}{x^2y}$,

变形正确,符合题意. 故选 D.

3. D 【解析】 $\frac{x+y}{3xy}, \frac{3y}{2x^2}, \frac{xy}{6xy^2}$ 的分母分别是 $3xy, 2x^2, 6xy^2$, 故最简公分母为 $6x^2y^2$. 故选 D.

4. B 【解析】根据题意可知, $x^2-49=0$, 且 $x-7 \neq 0$, 解得 $x=\pm 7$, 且 $x \neq 7$, $\therefore x=-7$, 故选 B.

☆ 关键点拨

分式有无意义及分式的值为零的条件

- (1) 分式无意义 \Leftrightarrow 分母为零;
- (2) 分式有意义 \Leftrightarrow 分母不为零;
- (3) 分式的值为零 \Leftrightarrow 分子为零且分母不为零.

5. $x \neq 2$ 【解析】 \because 分式 $\frac{3}{x-2}$ 有意义, $\therefore x-2 \neq 0$, $\therefore x \neq 2$, 故答案为 $x \neq 2$.

6. A 【解析】 $\left(\frac{\quad}{a+b}\right) \div \frac{a}{a^2-b^2} = \left(\frac{\quad}{a+b}\right) \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{a}$. \because 运算的结果不是分式, \therefore “()” 内的式子一定含因式 a , \therefore 只有 A 选项符合题意. 故选 A.

7. C 【解析】 $(2x)^2 \cdot \frac{y}{4x^2} = 4x^2 \cdot \frac{y}{4x^2} = y$, 故选 C.

8. -1 【解析】 $\frac{x}{1-x} + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{x-1}{1-x} = -1$, 故答案为 -1.

9. 1 【解析】 $\because x^2+2x-1=0$, $\therefore x^2+2x=1$, $\therefore \frac{x^2+3x}{x+1} = \frac{x+(x^2+2x)}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$. 故答案为 1.

10. 【解】 $\left(a+2b-\frac{5b^2}{a-2b}\right) \div \frac{a+3b}{a-2b} = \frac{(a+2b)(a-2b)-5b^2}{a-2b} \times \frac{a-2b}{a+3b} = \frac{a^2-9b^2}{a+3b} = a-3b$. $\because a=3, b=1$, \therefore 原式 $= 3-3 \times 1 = 0$.

11. 【解】 $\left(1+\frac{2}{a-1}\right) \div \frac{a^2-1}{a^2-2a+1} + a = \frac{a-1+2}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{(a+1)(a-1)} + a = 1+a$, 当 $a=2\ 025$ 时, 原式 $= 1+2\ 025 = 2\ 026$.

12. 【解】 $\left(x-2-\frac{5}{x+2}\right) \div \frac{3-x}{2+x} = \left(\frac{x^2-4}{x+2}-\frac{5}{x+2}\right) \cdot \frac{2+x}{3-x} = \frac{x^2-9}{x+2} \cdot \frac{2+x}{3-x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+2} \cdot \frac{2+x}{3-x} = -x-3$.
 $\because x^2+x-2=0$, $\therefore (x+2)(x-1)=0$, 解得 $x_1=-2, x_2=1$. $\because x+2 \neq 0, 3-x \neq 0$,
 $\therefore x \neq -2, x \neq 3$, $\therefore x=1$. 当 $x=1$ 时, 原式 $= -x-3 = -1-3 = -4$.

☆ 易错警示

将数值代入求值, 代入数值时要注意使原分式及化简过程中出现的分式均有意义.

☆ 易错警示

进行分式混合运算时, 容易弄错运算顺序而致错, 对于同一级运算, 要从左到右进行计算.

刷提升

1. A 【解析】A 选项, $2x^2+1>0$, 无论 x 取何值, 分式都有意义, 故本选项符合题意; B 选项, $x=-\frac{1}{2}$ 时, $2x+1=0$, 分式无意义, 故本选项不符合题意; C 选项, $x=\frac{1}{3}$ 时, $3x-1=0$, 分式无意义, 故本选项不符合题意; D 选项, $x=0$ 时, $2x^2=0$, 分式无意义, 故本选项不符合题意. 故选 A.

2. B 【解析】 $\frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1} = \frac{M(x-1)+N(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2}$, $\therefore \frac{2x+7}{x^2+x-2} = \frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2}$,
 $\therefore \begin{cases} M+N=2, \\ -M+2N=7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} M=-1, \\ N=3, \end{cases}$ 故选 B.

3. B 【解析】设这两次单价分别为 a, b ($a \neq b, a>0, b>0$), 小明妈妈购买方案中每次购买的数量为 Q , 则总花费为 $Q(a+b)$, 总数量为 $Q+Q=2Q$, \therefore 平均单价为 $\frac{Q(a+b)}{2Q} = \frac{a+b}{2}$, \therefore 小明妈妈方案的平均单价为 $\frac{a+b}{2}$. 设小明购买方案中每次购买的总

金额为 A , 则第一次购买的数量为 $\frac{A}{a}$, 第二次购买的数量为 $\frac{A}{b}$, 总花费为 $A+A=2A$, \therefore 总数量为 $\frac{A}{a} + \frac{A}{b} = A\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$,
 \therefore 平均单价为 $\frac{2A}{A\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{2}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{2ab}{b+a}$, \therefore 小

明方案的平均单价为 $\frac{2ab}{a+b}$. $\therefore \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} - \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)} = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} > 0$, $\therefore \frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$,
 \therefore 小明方案的平均单价低于小明妈妈的平均单价, \therefore 小明的方案实惠, 故选 B.

4. -7 【解析】 $\because \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$, $\therefore \frac{x-y}{xy} = -2$, 即 $x-y = -2xy$, 则原式 $= \frac{-2xy-5xy}{-2xy+3xy} = \frac{-7}{1} = -7$, 故答案为 -7.

5. $\frac{n}{n+1}$ 【解析】 $\because f(1) = \frac{1}{1 \times 2}, f(2) = \frac{1}{2 \times 3}, f(a) = \frac{1}{a(a+1)}$,
 $\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n) = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} =$

刷易错

13. D 【解析】 $\left(-\frac{y^2}{x}\right)^2 \div y \times \frac{1}{y} = \frac{y^4}{x^2} \times \frac{1}{y} \times \frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2}$. 故选 D.

$\frac{n}{n+1}$, 故答案为 $\frac{n}{n+1}$.

$$\begin{aligned} 6. \text{【解】} & \frac{a^2-4}{a^2+2a} \div \left(\frac{a^2+4}{a} - 4 \right) \\ &= \frac{(a+2)(a-2)}{a(a+2)} \div \frac{a^2+4-4a}{a} \\ &= \frac{(a+2)(a-2)}{a(a+2)} \cdot \frac{a}{(a-2)^2} = \frac{1}{a-2}. \end{aligned}$$

当 $a=3$ 时, 原式 $=1$.

$$7. \text{【解】} \because x^2+xy-1=0, \therefore x^2+xy=1, \therefore \text{原式} = \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2xy+y^2}{x} \right) \times$$

$$\frac{x^2}{x+y} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x} \times \frac{x^2}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{x} \times \frac{x^2}{x+y} = x(x+y) = x^2+xy=1.$$

刷素养

$$8. \text{【解】} (1) \frac{a+5}{a+2} = \frac{(a+2)+3}{a+2} = 1 + \frac{3}{a+2},$$

故答案为 $1 + \frac{3}{a+2}$.

$$(2) y = \frac{2a^2+8}{a^2+2} = \frac{2(a^2+2)+4}{a^2+2} = 2 + \frac{4}{a^2+2}.$$

$$\because a^2+2 \geq 2, \therefore 0 < \frac{4}{a^2+2} \leq 2, \therefore 2 < 2 + \frac{4}{a^2+2} \leq 4, \therefore 2 < y \leq 4.$$

$$(3) \frac{5a^2+9a-3}{a+2} = \frac{5a(a+2)-(a+2)-1}{a+2} = 5a-1 - \frac{1}{a+2}.$$

\therefore 分式 $\frac{5a^2+9a-3}{a+2}$ 拆分成一个整式与一个分式(分子为整数)

的和的形式为 $5x-11+\frac{1}{y-6}$, $\therefore 5a-1=5x-11, y-6=-(a+2)$,

$$\therefore x=a+2, y=-a+4,$$

$$\therefore x+y=6, xy=(a+2)(-a+4)=-a^2+2a+8,$$

$$\therefore x^2+y^2+xy=(x+y)^2-xy=36-(-a^2+2a+8)=a^2-2a+28=(a-1)^2+27.$$

$\therefore (a-1)^2 \geq 0, \therefore (a-1)^2+27 \geq 27, \therefore$ 当 $a=1$ 时, x^2+y^2+xy 的值最小, 最小值是 27.

考点 4 二次根式

刷基础

1. D 【解析】A 选项, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, 所以 $\sqrt{12}$ 不是最简二次根式;

B 选项, $\sqrt{4}=2$, 所以 $\sqrt{4}$ 不是最简二次根式; C 选项, $2\sqrt{\frac{1}{2}}$

的被开方数含有分母, 所以 $2\sqrt{\frac{1}{2}}$ 不是最简二次根式; D 选

项, $\sqrt{21}$ 是最简二次根式. 故选 D.

刷有所得

最简二次根式

(1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 把满足上述两个条件的二次根式, 叫作最简二次根式.

2. C 【解析】根据题意得 $\begin{cases} x \geq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases}$ 解得 $0 \leq x \leq 1$, 故选 C.

3. D 【解析】 $\because \sqrt{x^2+1}$ 是最简二次根式, 且与 $\sqrt{5}$ 是同类二次根式, $\therefore x^2+1=5$, 解得 $x=\pm 2$, 故选 D.

4. $-2a$ 【解析】由数轴可知, $a < 0, b > 0, \therefore a-b < 0, \sqrt{a^2} = -a, \sqrt{b^2} = b, \therefore \sqrt{(a-b)^2} = b-a, \therefore \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} + \sqrt{(a-b)^2} = -a-b+(b-a) = -a-b+b-a = -2a$. 故答案为 $-2a$.

5. C 【解析】 $a - \frac{1}{2} < 5 < a$, 解不等式 $a - \frac{1}{2} < 5$ 得 $a < \frac{11}{2}, \therefore 5 < a < \frac{11}{2}, \therefore 18 < 25 < 27 < 30, 25 < 32 < 48, \therefore 3\sqrt{2} < 5 < 3\sqrt{3} < 5, 5 < 4\sqrt{2} <$

$4\sqrt{3}, \therefore$ 四个选项中只有 C 选项符合题意, 故选 C.

6. ④ 【解析】 $\because 16 < 18 < 25, \therefore 4 < \sqrt{18} < 5, \therefore 5 < \sqrt{18} + 1 < 6, \therefore$ 表示 a 的点落在段 ④. 故答案为 ④.

7. $4-\sqrt{3}$ 【解析】原式 $= \sqrt{3} - 2[(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)]^{2024} \times (\sqrt{3}-2) = \sqrt{3} - 2(\sqrt{3}-2) = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4 = 4 - \sqrt{3}$. 故答案为 $4 - \sqrt{3}$.

8. $\sqrt{2}+1$ 【解析】因为 $3+2\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+2=1^2+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(1+\sqrt{2})^2$, 所以 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}$, 故答案为 $\sqrt{2}+1$.

9. 【解】 $\sqrt{48} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{12} = \sqrt{48 \div 3} - \sqrt{\frac{1}{2} \times 12} = \sqrt{16} - \sqrt{6} = 4 - \sqrt{6}$.

10. 【解】 $(a-1)^2 + b(b+2a) + 2a = a^2 - 2a + 1 + 2ab + b^2 + 2a = a^2 + 2ab + b^2 + 1 = (a+b)^2 + 1$,

当 $a+b=\sqrt{2}$ 时, 原式 $= (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$.

$$11. \text{【解】} \sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024} = \frac{\sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024}}{1} =$$

$$\frac{(\sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024})(\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024})}{\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024}}, \sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023} = \frac{\sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023}}{1} =$$

$$\frac{(\sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023})(\sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023})}{\sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023}}.$$

$\therefore \sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024} > \sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023},$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024}} < \frac{1}{\sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023}}, \text{ 即 } \sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024} < \sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023}.$$

刷易错

12. C 【解析】由二次根式性质可知 $-xy^2 \geq 0$. 因为 $y^2 \geq 0$, 所以 $-x \geq 0$, 所以 $x \leq 0$. 又因为 $xy < 0$, 所以 $x < 0, y > 0$, 所以

$$\frac{\sqrt{-xy^2}}{y} = \frac{y\sqrt{-x}}{y} = \sqrt{-x}.$$

易错警示

利用二次根式的性质化简时,容易忽视字母的取值范围而致错.化简时,要判断字母的取值范围,使得化简后的二次根式的根号下的数是非负数.

刷提升

1. B 【解析】原式 $= \sqrt{\frac{1}{3} \times 24} + 2 = \sqrt{8} + 2$. $\because \sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}, \therefore 2 <$

$\sqrt{8} < 3, \therefore 4 < \sqrt{8} + 2 < 5, \therefore$ 估计 $\sqrt{\frac{1}{3} \times 24} + 2$ 的值应该在 4 和 5 之间, 故选 B.

2. A 【解析】 $\because a = \sqrt{5} + 2, b = \sqrt{5} - 2, \therefore a + b = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5}, ab = (\sqrt{5} + 2) \times (\sqrt{5} - 2) = 5 - 4 = 1, \therefore \sqrt{a^2 + b^2 + 7} = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab + 7} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2 \times 1 + 7} = \sqrt{20 - 2 + 7} = \sqrt{25} = 5$, 故选 A.

3. A 【解析】 $\because \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 2, \therefore a \geq 0$ 且 $a \neq 0, \therefore a > 0, \therefore \sqrt{a} > 0$, $\therefore \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} > 0, \therefore \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2} + 4 = \sqrt{2^2 + 4} = 2\sqrt{2}, \therefore \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ 的值为 $2\sqrt{2}$. 故选 A.

4. B 【解析】由题意得 $AB = \sqrt{10} = c, AC = \sqrt{6} = b, BC = 2\sqrt{2} = a$, $\therefore S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[48 - \left(\frac{6+8-10}{2} \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} (48-4)} = \sqrt{11}$. 故选 B.

5. B 【解析】 \because 甲、乙、丙三张纸片是正方形, 丙纸片的面积为 2, \therefore 丙纸片的边长为 $\sqrt{2}$, \therefore 丁纸片的宽为 $\sqrt{2}$. \because 丁纸片的面积为 $2\sqrt{2}$, \therefore 丁纸片的长为 $2\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 2$, \therefore 乙纸片的边长为 $2 + \sqrt{2}$, \therefore 甲纸片的边长为 $(2 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$, 故选 B.

刷素养

6. 【解】 (1) $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, 故答案为 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$$(2) \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{100} - \sqrt{99} \\ = \sqrt{100} - 1 \\ = 10 - 1 \\ = 9.$$

$$(3) \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2\,023}+\sqrt{2\,025}} \\ = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}}{2} \\ = \frac{1}{2} \times (\sqrt{3}-1 + \sqrt{5}-\sqrt{3} + \sqrt{7}-\sqrt{5} + \cdots + \sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}) \\ = \frac{1}{2} \times (-1 + \sqrt{2\,025}) \\ = \frac{\sqrt{2\,025}-1}{2} \\ = 22.$$

关键点拨

分母有理化

利用平方差公式去掉分母中的根号是分母有理化的常用方法.

检测验收练

刷速度

1. C 【解析】 $-(-2\,025) = 2\,025$, 为正数; $-|-2\,025| = -2\,025$, 为负数; 0 既不是正数, 也不是负数; $\left(-\frac{5}{24}\right)^3 = -\frac{125}{13\,824}$, 为负数; $-2\,025^2$ 为负数; -202 为负数, 所以负数有 4 个, 故选 C.

2. A 【解析】A 选项, $m^3 \cdot m^3 = m^6$, 故此选项符合题意; B 选项, $m^3 + m^3 = 2m^3$, 故此选项不符合题意; C 选项, $(m^3)^2 = m^6$, 故此选项不符合题意; D 选项, $m^6 \div m^2 = m^4$, 故此选项不符合题意. 故选 A.

3. A 【解析】根据题意得 $a > 0, b < 0$ 且 $|b| > |a|$, $\therefore b - a < 0, \frac{b}{a} < -1$. $\therefore |-a| = |a|, \therefore |-a| < -b$, \therefore 正确的结论是①④, 故选 A.

4. C 【解析】 $8\,110\,700 = 8.110\,7 \times 10^6$. 故选 C.

5. B 【解析】 $\sqrt{2}(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{6} + \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{12} + 4$. $\because 9 < 12 < 16, \therefore \sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$, 即 $3 < \sqrt{12} < 4, \therefore 3 + 4 < \sqrt{12} + 4 < 4 + 4$, 即 $7 < \sqrt{12} + 4 < 8, \therefore 7 < \sqrt{2}(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) < 8$, 故选 B.

6. C 【解析】设 $CF = a, OF = b$. \because 四边形 $OHDG$ 和四边形 $OEBF$ 都为正方形, $\therefore OG = OH = CF = a, OE = OF = b$, \therefore 正方形 $OHDG$ 和正方形 $OEBF$ 的面积之和为 $a^2 + b^2$. $\because S_{\text{矩形}OFCH} = 8, C_{\text{矩形}OECH} = 12, \therefore ab = 8, a + b = 6, \therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 36 - 16 = 20$. 故选 C.

7. $x \leq 3$ 且 $x \neq 0$ 【解析】由题意, 得 $3 - x \geq 0, x \neq 0$, 解得 $x \leq 3$ 且 $x \neq 0$. 故答案为 $x \leq 3$ 且 $x \neq 0$.

易错警示

二次根式有意义的条件与分式有意义的条件

二次根式有意义的条件是被开方数大于或等于0,分式有意义的条件是分母不等于0,二者不可混淆.

- 8.2 【解析】 $\because (a-1)^2 + |b-2| = 0, \therefore a-1=0, b-2=0$, 解得 $a=1, b=2, \therefore ab=1 \times 2=2$, 故答案为2.

关键点拨

非负数的性质

几个非负数的和为0时,这几个非负数都为0.

9. $2b(a-b)^2$ 【解析】 $2a^2b-4ab^2+2b^3=2b(a^2-2ab+b^2)=2b(a-b)^2$, 故答案为 $2b(a-b)^2$.

10. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】 $\sqrt{3}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{48}}{6}=\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- 11.2 【解析】 $\because a^2-2b+1=0, \therefore a^2+1=2b, \therefore \frac{4b}{a^2+1}=\frac{4b}{2b}=2$, 故答案为2.

12. n^2-2n+3 【解析】题图(1)有2个三角形, 记作 $a_1=0^2+2=2$;

题图(2)有3个三角形, 记作 $a_2=1^2+2=3$;

题图(3)有6个三角形, 记作 $a_3=2^2+2=6$;

题图(4)有11个三角形, 记作 $a_4=3^2+2=11$,

按此方法继续下去, 则 $a_n=(n-1)^2+2=n^2-2n+3$. 故答案为 n^2-2n+3 .

13. 【解】 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-2\sin 60^\circ+\sqrt{12}+1-\sqrt{3}=1-2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$

$$=2-2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}$$

$$=2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}$$

$$=2+2\sqrt{3}.$$

14. 【解】 $[(2x+y)(2x-y)+y(y-2x)] \div x=(4x^2-y^2+y^2-2xy) \div x=(4x^2-2xy) \div x=4x-2y$. 当 $x=1, y=-2$ 时, 原式 $=4 \times 1-2 \times (-2)=8$.

15. 【解】原式 $=\frac{x-1+x+1}{x-1} \div \frac{x(x+1)}{(x-1)^2}+\frac{2(1-x)}{(x+1)(x-1)}$
 $=\frac{2x}{x-1} \times \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}+\frac{2(1-x)}{(x+1)(x-1)}$
 $=\frac{2(x-1)}{x+1}-\frac{2}{x+1}=\frac{2x-4}{x+1}.$

$\because x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1, \therefore x=2$. 当 $x=2$ 时, 原式 $=\frac{2 \times 2-4}{2+1}=0$.

16. 【解】(1) 根据题意可得 $2\{1, 2, 3, 4\}=\{2, 4, 6, 8\}=2 \times 8-4 \times 6=-8$, 故答案为-8.

(2) $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow (1, 2)=\{1, 2, 3, 4\}+2\{1, 2, 3, 4\}=4 \times 1-2 \times 3-8=-10$, 故答案为-10.

(3) 设输出一个“微笑”的“卷积”是 $\{a, b, c, d\} \rightarrow (4, 3)$, 则可得 $\{a, b, c, d\} \rightarrow (4, 3)=25$.

$$\therefore \{a, b, c, d\} \rightarrow (4, 3)=4\{a, b, c, d\}+3\{a, b, c, d\}$$

$$=\{4a, 4b, 4c, 4d\}+\{3a, 3b, 3c, 3d\}$$

$$=16ad-16bc+9ad-9bc=25ad-25bc,$$

$$\therefore 25ad-25bc=25, \therefore ad-bc=1,$$

故可输出一个“微笑”的“卷积”是 $\{1, 1, 2, 3\} \rightarrow (4, 3)$ (答案不唯一).

第二章 方程(组)与不等式(组)

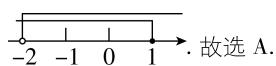
A 湖南真题诊断练

刷诊断

1. A 【解析】把 $x=1$ 代入 $2x+m=5$, 得 $2+m=5$, 解得 $m=3$. 故选 A.

2. A 【解析】 $\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}$, 方程两边同时乘 $x(x+1)$, 得 $x+1=2x$. 故选 A.

3. A 【解析】由 $2x+4>0$ 得 $x>-2$, 由 $x-1 \leq 0$ 得 $x \leq 1$, 则不等式组的解集为 $-2 < x \leq 1$, 解集在数轴上表示为



4. C 【解析】由题意可列方程组 $\begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94, \end{cases}$ 故选 C.

5. $x=\frac{5}{4}$ 【解析】 $\frac{3}{x+1}=\frac{2}{2x-1}$, 去分母, 得 $3(2x-1)=2(x+1)$, 去

括号, 得 $6x-3=2x+2$, 移项, 得 $6x-2x=3+2$, 合并同类项, 得

$4x=5$, 系数化为1, 得 $x=\frac{5}{4}$. 检验: 当 $x=\frac{5}{4}$ 时, $(x+1)(2x-$

$1)=\left(\frac{5}{4}+1\right) \times\left(2 \times \frac{5}{4}-1\right)=\frac{9}{4} \times \frac{3}{2}=\frac{27}{8} \neq 0$, $\therefore x=\frac{5}{4}$ 是原分

式方程的解. 故答案为 $x=\frac{5}{4}$.

6. -1 2 【解析】 \because 关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-2=0$ 的一个根为-1, $\therefore 1-m-2=0$, 解得 $m=-1$. 设原方程的另一个根为 x_2 , 则 $-x_2=-2, \therefore x_2=2$. 故答案为-1, 2.

关键点拨

一元二次方程根与系数的关系

若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两个实

数根, 则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$.

7. $x=4$ 【解析】 \because 关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-4}-\frac{m}{4-x}=1(m$ 为常数)